

Çelik veya Karbon Fiber Plakalar ile Güçlendirilmiş Çerçeve Tipi Yapısal Sistemlerin Analizi – Çerçeve/Düğüm Makro Elemanı

Y. Kaymak

*Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Ankara 06531, Türkiye*

M. U. Polat

*Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Ankara 06531, Türkiye*

ÖZET: Dışarıdan çelik veya FRP plakalar yapıştırılarak güçlendirilmiş çerçeve tipi betonarme (B/A) yapısal sistemlerin analiz ve tasarımı için malzeme davranışı olarak doğrusal olmayan bir kompozit kiriş/kolon makro elemanı geliştirilmiştir. B/A elemanın elasto-plastik davranışı elemanın moment-eğrilik ilişkisi kullanılarak göz önüne alınmaktadır. Bu ilişki kullanıcı tarafından dışarıdan verilebileceği gibi elemanın bilinen donatı ve malzeme özellikleri göz önüne alınarak otomatik olarak da hesaplanabilmektedir. Çelik plakaların elasto-plastik, FRP tabakaların ise kopma noktasına kadar doğrusal elastik davrandığı varsayılmaktadır. Çelik veya FRP plaka ile B/A eleman yüzeyi arasındaki ince yapışkan tabaka ise özel bir arayüz sonlu elemanı ile modellenmektedir. Arayüz elemanında literatürde mevcut test sonuçlarına dayanan ampirik bir kırılma kriteri kullanılmakta olup bu arayüz elemanı yapıştırılan çelik plakanın akması veya karbon fiber tabakanın kopmasından başlayarak tabakaların beton yüzeyden ayrışmasına kadar değişen göçme mekanizmalarını modelleyebilmektedir. Bu tür yapısal güçlendirme yaklaşımının pratikteki uygulamalarında en kritik unsur yapıştırılan plakaların eleman uçlarındaki veya birleşimlerdeki ankraj şartlarıdır. Bu ankraj durumu uygulamanın başarısını ve etkinliğini doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle özel bir köşe bağlantı ve ankraj elemanı da makro eleman formülasyonuna dahil edilmiştir. Bu sayede eleman uçlarındaki ve birleşimlerdeki ankraj ve süreklilik şartları eleman davranışına yansıtılabilmektedir.

Anahtar Kelimeler : Komposite çerçeve makro elemanı, komposite düğüm makro elemanı, FRP ile yapısal güçlendirme.

ABSTRACT: A materially non-linear layered beam macro element is developed for the analysis of R/C beams and columns strengthened by externally bonded steel plates and/or FRP lamina. The elasto-plastic behavior of R/C member is incorporated by its internally generated or externally supplied moment-curvature diagram. The steel plate is assumed to be elasto-plastic and the FRP laminate is assumed to behave linearly elastic up to rupture. The thin epoxy layer between the R/C member and the externally bonded lamina is simulated by a special interface element which allows for the changing failure

modes from plate yielding/FRP rupture to separation of the bonded lamina as a result of bond failure in the epoxy layer. An empirical failure criterion based on test results is used for the epoxy material of the interface. The most critical aspect of such applications in real life frame structures with the use of FRP sheets and laminates is the anchorage conditions at the member ends and junctions. This has direct influence on the success and the effectiveness of the application. Therefore, a special corner piece anchorage element is also considered in the formulation of the macro element, which establishes the fixity and continuity conditions at the member ends and the joints.

Giriş

B/A çerçeve elemanlarının rijitlik ve dayanımı elemanın çekme ve basınç bölgelerine çelik veya FRP plakalar yapıştırılarak artırılabilir. Bu yöntem mevcut elemanın kesit boyutlarını ve ağırlığını çok az büyütmesinin yanında uygulanmasının kolaylığı açısından da sıkça tercih edilmektedir.

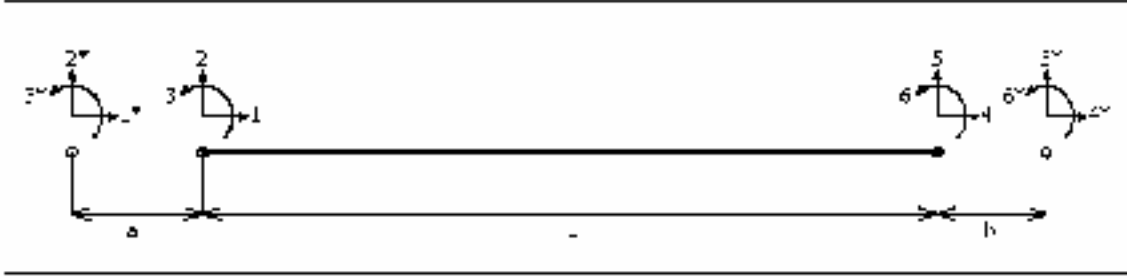
Son yıllarda bu konu üzerinde pek çok araştırma yapılmıştır. Ancak bu tür yapıların analizlerini gerçekleştirecek programların sayısı çok sınırlıdır ve özel olarak bu tür sistemler için tasarlanmamıştır. Sonlu elemanlar yönetimi bu tip analizleri gerçekleştirmek için çok uygun bir yöntemdir. Fakat, gerçekçi bir model kurmak yorucu ve zaman alan bir iştir. Oluşturulan model çok sayıda sonlu eleman ve düğüm noktası içereceğinden tasarımcı mühendis açısından da fazla çekici ve pratik olamamaktadır. Söz konusu zorlukları aşmak amacıyla tabakaların birbirinden ayrılmadığı varsayılarak boyu L , kalınlığı h , yarıçapı R ($h \ll R$) ve N tabakadan oluşan bir eleman geliştirilmiştir (J.N. Reddy ve S.K. Kassegne, 1997). Aynı varsayımlarla tabakalı elemanların analizi için sonlu şerit yöntemi önerilmiştir (S.S.E. Lam ve G.P. Zou, 2001).

Bu tür uygulamalarda eleman taşıma kapasitesini belirleyen unsur genellikle yapışma yüzeyindeki göçme olduğundan analizlerin doğrusal sonlu elemanlar paket yazılımları ile gerçekleştirilmesi mümkün olamamaktadır. Tabakaların ayrılması durumu, ayrılan kısımlar farklı kırımlar şeklinde düşünülerek ve ayrılma yüzeyindeki temas kuvvetlerini de açılma miktarına bağlı düşünülerek çözülmesi önerilmiştir (Lou ve Hanagud, 2000). Bu amaçla kırılma mekaniği tabanlı, gevşeyen malzeme modellenmiş ve kalınlığı sıfır olan bir arayüz elemanı formülasyonu da geliştirilmiştir (Qiu, Crisfield ve Alfano, 2001). (Li, Lee-Sullivan ve Thring, 1996) doğrusal olmayan sonlu elemanlar paket programlarını kullanarak 2B modellerle gerilmelerin ve birim deformasyonların yapışkan tabaka içindeki değişimini incelemiştir. Aynı çalışma 3B olarak da yapılmıştır (Pandey ve Narasimhan, 2001). (Colotti ve Spadea, 2001) dışarıdan çelik veya FRP plaka yapıştırılmış B/A kirişlerin kapasitesinin hesabı için B/A kesit kapasitesi hesabına çok benzer bir yöntem önermektedir. (Chen ve Teng, 2001) ise çelik ile beton veya FRP ile beton arasındaki yapıştırıcı malzemenin davranışı için bir model önermektedir. Literatürde önerilmiş mevcut modellerin birbirleriyle ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılması ise (Smith ve Teng, 2002) tarafından verilmektedir.

Dışarıdan çelik veya FRP plakalar yapıştırılarak güçlendirilmiş çerçeve tipi B/A yapısal sistemlerin analizi için geliştirilen makro elemanlar ile yapısal sistemdeki göçme mekanizmalarını gözleme imkanı bulunmaktadır. Bu tip yapıların elemanlarında ve düğüm noktalarında oluşabilecek plakaların B/A eleman yüzeyinden ayrışması, kopması veya akması, birleşim ankraj elemanlarının göçmesi gibi durumlar modellenmektedir.

Çerçeve Elemanı

Doğrusal olmayan elasto-plastik çerçeve elemanı Bernoulli kirişi varsayımlarına dayanılarak geliştirilmiştir. Rijitlik matrisi moment eğrilik ilişkisi ve gerilme-brim deformasyon ilişkisi kullanılarak hesaplanır. Rijitlik matrisi hesabında EI terimi moment-eğrilik ilişkisinden (elemandaki ortalama eğrilik kullanılarak) ve EA terimindeki elastisite modülü E ise gerilme-brim deformasyon eğrisinin eğiminden alınmaktadır. Eleman kesit alanı A ise sabit kabul edilmektedir.



Şekil 1.

Düzlem çerçeve elemanı rijitlik matrisi.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Rijit uç bölgeleri olmayan çerçeve elemanın deplasman vektörüne \underline{U} ve olanınkine de \underline{U}^* diyelim. Bu iki deplasman vektörü arasındaki ilişki

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \\ u_6^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

Rijit uç bölgelerinin olması durumunda rijitlik matrisi ve kuvvet vektörleri üzerinde transformasyon yapılması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \underline{K}^* &= \underline{T}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{T} \\ \underline{F}^* &= \underline{T}^T \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (3)$$

Buradaki transformasyon matrisi \underline{T} aşağıda verildiği gibidir

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Doğrusal olmayan analiz yöntemlerinde tepki hesabı analizin en önemli kısmıdır ve çözümün doğruluğunu belirler. Uygulanan yöntemde aksenal etkiler ve eğilme etkileri birbirlerinden bağımsız olarak düşünülmüştür. Verilen bir deplasman vektörünün oluşmasını sağlayacak aksenal yük ve eğilme momenti aşağıdaki yöntemle hesaplanmaktadır.

Eksenal yük hesabı için birim deformasyon, gerilme ve kuvvet

$$\varepsilon = \frac{u_4 - u_1}{L} \quad \sigma = f(\varepsilon) \quad N = A \cdot \sigma \quad (5)$$

olarak hesaplanır. Eğilme momenti hesabında ortalama eğrilik yerine iki Gauss noktasındaki eğrilik göz önüne alınmaktadır. Eğrilik-deplasman ilişkisi aşağıda verildiği gibidir

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -a_1 \cdot u_2 - a_2 \cdot u_3 + a_1 \cdot u_5 - a_3 \cdot u_6 \\ \kappa_2 &= a_1 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 - a_1 \cdot u_5 + a_2 \cdot u_6 \end{aligned} \quad (6)$$

buradaki a_1 a_2 ve a_3 sabitleri aşağıda verilmektedir.

$$a_1 = \frac{3.46410161513775}{L^2} \quad a_2 = \frac{2.732050807568877}{L} \quad a_3 = \frac{0.732050807568877}{L} \quad (7)$$

Gauss noktalarındaki momentler M_1 ve M_2 ise moment-eğrilik ilişkisinden eğrilik κ_1 ve κ_2 kullanılarak elde edilebilir.

Son olarak ta eleman uçundaki eğilme momentleri M_S ve M_E , kesme kuvvetleri V_S ve V_E ile tepki vektörleri \underline{R} ve \underline{R}^* .

$$\begin{aligned} M_S &= 0.5 \cdot L \cdot (-a_2 \cdot M_1 + a_3 \cdot M_2) \\ M_E &= 0.5 \cdot L \cdot (-a_3 \cdot M_1 + a_2 \cdot M_2) \end{aligned} \quad (8)$$

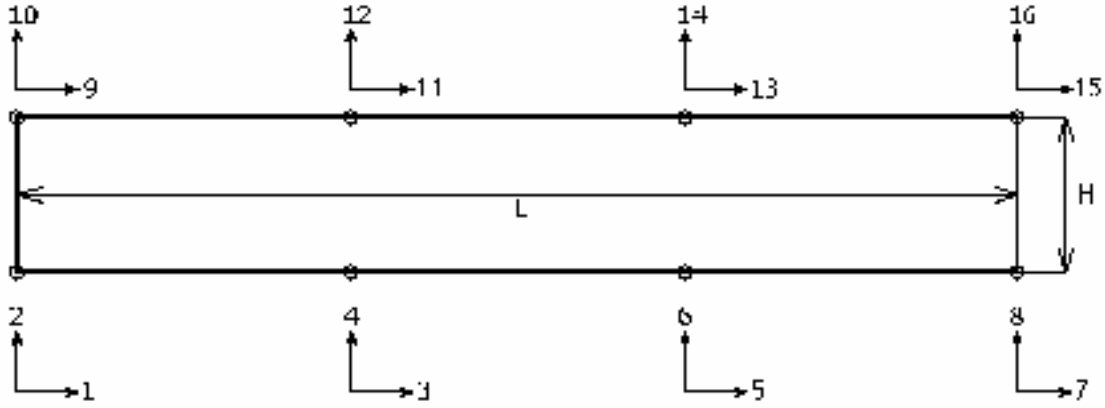
$$\begin{aligned} V_S &= 0.5 \cdot L \cdot a_1 \cdot (-M_1 + M_2) \\ V_E &= 0.5 \cdot L \cdot a_1 \cdot (M_1 - M_2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \underline{R} &= [-N \quad V_S \quad M_S \quad N \quad V_E \quad M_E]^T \\ \underline{R}^* &= \underline{T}^T \cdot \underline{R} \end{aligned} \quad (10)$$

olarak hesaplanır.

Arayüz Elemanı

Doğrusal olmayan bir arayüz elemanı geliştirilmiştir. Bu amaçla izoparametrik eleman formülasyonu ve sayısal integrasyon yöntemleri kullanılmıştır. Arayüz elemanı aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi 8 düğüm noktalıdır. Bu düğümler çerçeve elemanının deplasmanları ile uyum sağlamak amacıyla eleman çevresine 4 adedi üst kenar boyunca, 4 adedi de alt yüzeyde olacak şekilde yerleştirilmiştir. Malzeme modeli olarak ampirik bir gerilme-birim deformasyon ilişkisi kullanılmaktadır. Burada gerilmeler kopma anına kadar birim deformasyonla doğru orantılı olarak değişmektedir. Sayısal problemlerin olmaması için $L/H < 50$ olmalıdır.



Şekil 2.

Eleman deplasmanı ve düğüm noktası koordinatları

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{B1} & u_{B2} & u_{B3} & u_{B4} & u_{T1} & u_{T2} & u_{T3} & u_{T4} \\ v_{B1} & v_{B2} & v_{B3} & v_{B4} & v_{T1} & v_{T2} & v_{T3} & v_{T4} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & x_{B4} & x_{T1} & x_{T2} & x_{T3} & x_{T4} \\ y_{B1} & y_{B2} & y_{B3} & y_{B4} & y_{T1} & y_{T2} & y_{T3} & y_{T4} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

şekil fonksiyonları (yerel koordinat sisteminde) ise

$$\mathbf{N}(r,s) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{32} \cdot \left(\frac{1}{9} - r^2\right) \cdot (1-r) \cdot (1-s) \\ +\frac{27}{32} \cdot \left(\frac{1}{3} - r\right) \cdot (1-r^2) \cdot (1-s) \\ +\frac{27}{32} \cdot \left(\frac{1}{3} + r\right) \cdot (1-r^2) \cdot (1-s) \\ -\frac{9}{32} \cdot \left(\frac{1}{9} - r^2\right) \cdot (1+r) \cdot (1-s) \\ -\frac{9}{32} \cdot \left(\frac{1}{9} - r^2\right) \cdot (1-r) \cdot (1+s) \\ +\frac{27}{32} \cdot \left(\frac{1}{3} - r\right) \cdot (1-r^2) \cdot (1+s) \\ +\frac{27}{32} \cdot \left(\frac{1}{3} + r\right) \cdot (1-r^2) \cdot (1+s) \\ -\frac{9}{32} \cdot \left(\frac{1}{9} - r^2\right) \cdot (1+r) \cdot (1-s) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Deplasmanların ve global kordinatların eleman üzerindeki değişimi

$$\underline{u}(r,s) = \begin{pmatrix} u(r,s) \\ v(r,s) \end{pmatrix} = \tilde{\underline{U}}^T \cdot \underline{N}(r,s) \quad (14)$$

$$\underline{x}(r,s) = \begin{pmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \end{pmatrix} = \tilde{\underline{X}}^T \cdot \underline{N}(r,s) \quad (15)$$

Şekil fonksiyonlarının lokal r ve s koordinatlarına göre türevleri sırasıyla \underline{NR} ve \underline{NS} ile gösterirsek, genel kordinatlar x ve y nin lokal kordinatlar r ve s türevlerinin eleman üzerindeki değişimi

$$\frac{\partial \underline{x}(r,s)}{\partial r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial y(r,s)}{\partial r} \end{pmatrix} = \tilde{\underline{X}}^T \cdot \underline{NR}(r,s) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \underline{x}(r,s)}{\partial s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,s)}{\partial s} \\ \frac{\partial y(r,s)}{\partial s} \end{pmatrix} = \tilde{\underline{X}}^T \cdot \underline{NS}(r,s) \quad (17)$$

Jacobian matrisi

$$\underline{J}(r,s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(r,s)}{\partial r} & \frac{\partial x(r,s)}{\partial s} \\ \frac{\partial y(r,s)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,s)}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Şekil fonksiyonlarının genel kordinatlara göre türevi

$$\begin{pmatrix} \underline{NX}(r,s) \\ \underline{NY}(r,s) \end{pmatrix} = (\underline{J}^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{NR}(r,s) \\ \underline{NS}(r,s) \end{pmatrix} \quad (19)$$

olmaktadır. Birim deformasyon tensörü

$$\tilde{\underline{\epsilon}}(r,s) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}(r,s) & \epsilon_{xy}(r,s) \\ \epsilon_{yx}(r,s) & \epsilon_{yy}(r,s) \end{bmatrix} = \tilde{\underline{B}}(r,s) \cdot \tilde{\underline{U}} \quad (20)$$

veya vektör gösterimi ile

$$\underline{\epsilon}(r,s) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(r,s) \\ \epsilon_{yy}(r,s) \\ \gamma_{xy}(r,s) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Birim deformasyon-deplasman ilişkisi

$$\tilde{\underline{B}}(r,s) = \begin{bmatrix} NR_1 & NR_2 & NR_3 & NR_4 & NR_5 & NR_6 & NR_7 & NR_8 \\ NS_1 & NS_2 & NS_3 & NS_4 & NS_5 & NS_6 & NS_7 & NS_8 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Gerilme-birim deformasyon matrisi ise

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Gerilme tensörünün eleman üzerindeki değişimini şöyle ifade edebiliriz.

$$\underline{\sigma}(r,s) = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}(r,s) \quad \text{Eğer} \quad -\gamma_{cr} < \gamma_{xy}^*(r,s) < \gamma_{cr} \quad (24)$$

$$\underline{\sigma}(r,s) = \underline{0} \quad \text{Değilse}$$

Burada $\gamma_{xy}^*(r,s)$ asal yöndeki kesme birim deformasyonudur. Buradan da 2x3 Gauss integrasyon kuralı kullanılarak eleman rijitlik matrisi

$$\underline{K} = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}) dV \quad (25)$$

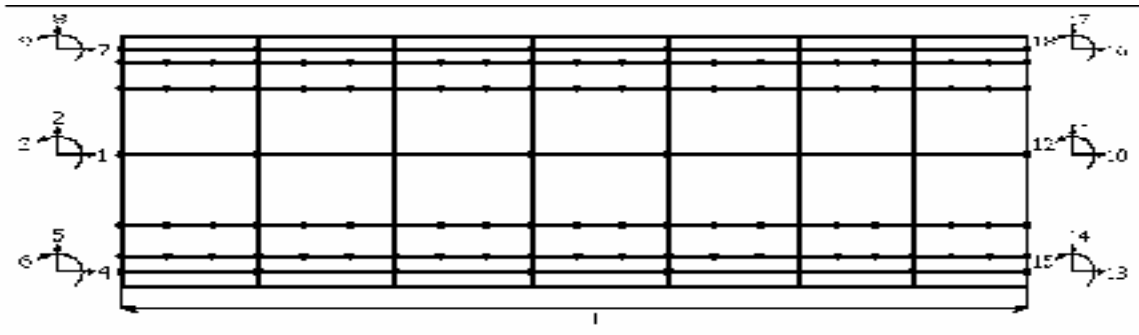
eleman tepkisi ise

$$\underline{R} = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}) dV \quad (26)$$

olarak hesaplanır.

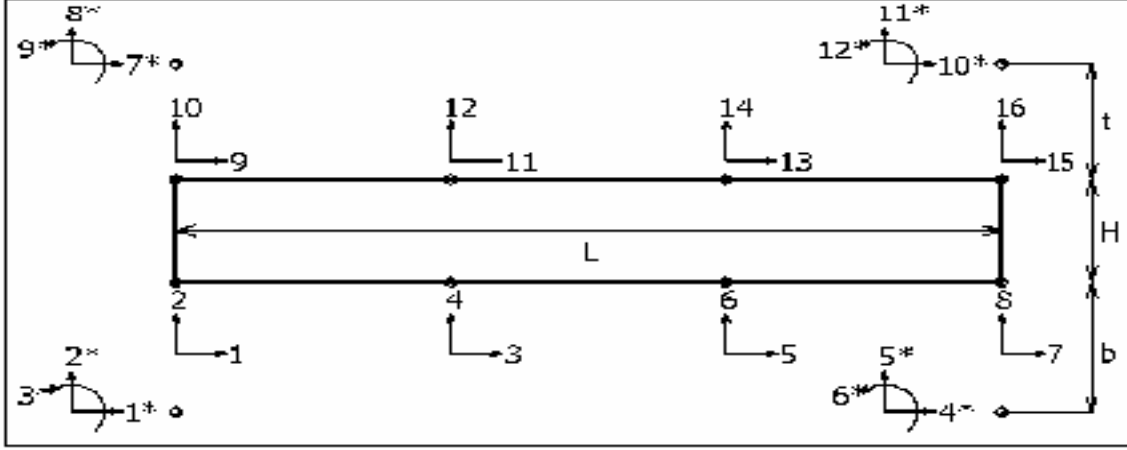
Çerçeve Makro Elemanı

Çerçeve ve arayüz elemanlarının birleşiminden oluşan, doğrusal olmayan bir çerçeve makro elemanı geliştirilmiştir. Şekil 3. de görüldüğü gibi makro eleman çok sayıda düğüm noktası içermektedir. İç kısımdaki düğüm noktaları kısıt deklemleri kullanılarak ve yoğunlaştırılarak elemlenmektedir. Böylece elemanda sadece 6 düğüm noktasına ait 18 serbestlik kalmaktadır. Rijitlik matrisi ve tepki vektörü çerçeve ve arayüz elemanlarının rijitlik ve tepki vektörlerinden toplanır ve yoğunlaştırılır. Çerçeve makro elemanı kendi kendinin sonlu eleman ağını oluşturma özelliğine sahiptir. Bu ağda en büyük arayüz elemanının L/H oranı 50 den küçük olmalıdır aksi takdirde sayısal problemler yaşanabilir. Gerilmeleri ve ayrılmaları gözlemlemek amacıyla sonlu elemanlar ağı kaliteli olacağından L/H kriteri genelde sağlanmış olacaktır.



Şekil 3.

Çerçeve makro elemanında kullanılan arayüz elemanının deplasman vektörü \underline{U} alt ve üst çerçeve elemanı deplasman vektörü \underline{U}^* olsun. Arayüz elemanı iki çerçeve elemanın arasına yerleştirilmiş olduğundan ve bu çerçeve elemanlarıyla birlikte davranacağından arayüz elemanının deplasman vektörü \underline{U} alt ve üst çerçeve elemanlarının deplasman vektörü \underline{U}^* cinsinden ifade edilebilir.



Şekil 4.

Deplasman vektörleri \underline{U} ve \underline{U}^* arasındaki ilişki

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_B \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_B & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_T \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_B^* \\ \underline{U}_T^* \end{pmatrix} \quad (27)$$

arayüz elemanının \underline{U} cinsinden denge denklemi

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (28)$$

olarak ifade edilebilir. Burada \underline{T}_B ve \underline{T}_T transformasyon matrisleridir.

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{4b}{3} & 0 & 1 & -\frac{4b}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & \frac{20}{27} & \frac{4L}{27} & 0 & \frac{7}{27} & -\frac{2L}{27} \\ 1 & \frac{4b}{3} & b & 2 & -\frac{4b}{3} & 0 \\ 3 & \frac{3L}{7} & \frac{3}{27} & 3 & \frac{3L}{20} & 0 \\ 0 & \frac{7}{27} & \frac{2L}{27} & 0 & \frac{20}{27} & -\frac{4L}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{4t}{3} & 0 & 1 & \frac{4t}{3} & -\frac{t}{3} \\ 0 & \frac{20}{27} & \frac{4L}{27} & 0 & \frac{7}{27} & -\frac{2L}{27} \\ 1 & -\frac{4t}{3} & -\frac{t}{3} & 2 & \frac{4t}{3} & 0 \\ 3 & \frac{3L}{7} & \frac{3}{27} & 3 & \frac{3L}{20} & 0 \\ 0 & \frac{7}{27} & \frac{2L}{27} & 0 & \frac{20}{27} & -\frac{4L}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Arayüz elemanının \underline{U}^* cinsinden denge denklemi

$$\underline{K}^* \cdot \underline{U}^* = \underline{F}^* \quad (30)$$

olup \underline{K}^* ve \underline{F}^* aşağıda verilen transformasyonlar ile hesaplanmaktadır.

$$\underline{K}^* = \underline{T}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{T} \quad (31)$$

$$\underline{F}^* = \underline{T}^T \cdot \underline{F}$$

Çerçeve makro elemanının denge denklemini (32) de olduğu gibi a geriye kalan serbestlikleri ve b yoğunlaştırılan serbestlikleri gösterecek şekilde ayırırsak ve ikinci denklemi kullanarak \underline{U}_b için çözer ve bunu birinci denkleme yerleştirirsek, denklem (33) de verilen yoğunlaşmış rijitlik matrisi ve kuvvet vektörü elde edilebilir.

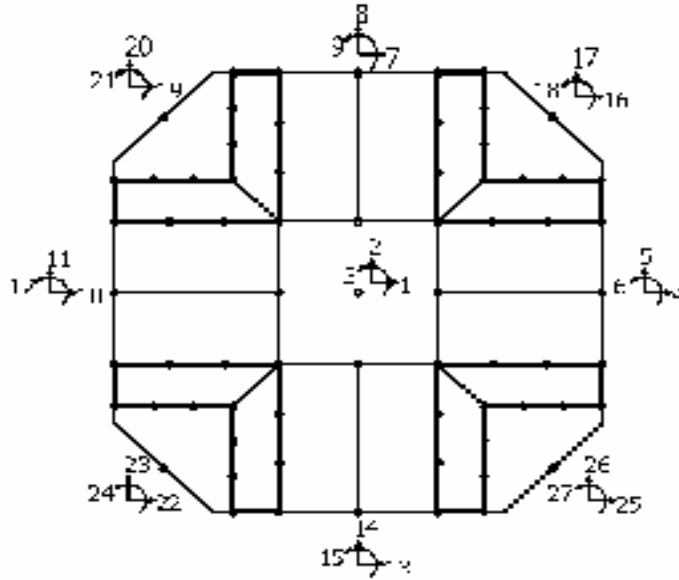
$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{aa} & \underline{K}_{ab} \\ \underline{K}_{ba} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_a \\ \underline{F}_b \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\underline{K}_{cc} = \underline{K}_{aa} - \underline{K}_{ab} \cdot \underline{K}_{bb}^{-1} \cdot \underline{K}_{ba} \quad (33)$$

$$\underline{F}_c = \underline{F}_a - \underline{K}_{ab} \cdot \underline{K}_{bb}^{-1} \cdot \underline{F}_b$$

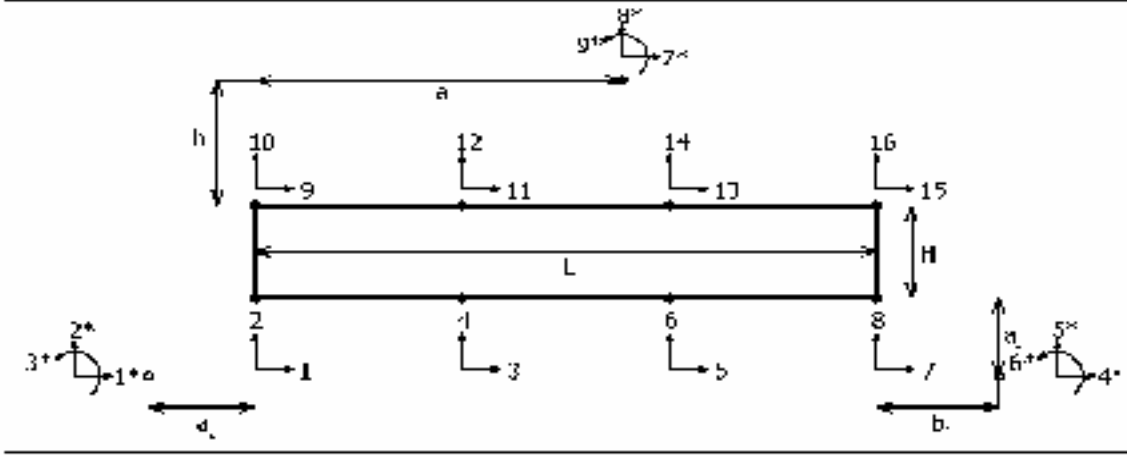
Düğüm Makro Elemanı

Çerçeve ve arayüz elemanlarının birleşiminden oluşan, doğrusal olmayan bir düğüm makro elemanı geliştirilmiştir. Şekil 5. de görüldüğü gibi makro eleman çok sayıda düğüm noktası içermektedir. İç kısımdaki düğüm noktaları kısıt deklemleri kullanılarak elemlenmektedir. Böylece elemanda sadece 9 düğüm noktasına ait 27 serbestik kalmaktadır. Rijitlik matrisi ve tepki vektörü çerçeve ve arayüz elemanlarının rijitlik ve tepki vektörlerinden toparlanır. Düğüm makro elemanı kendi kendinin sonlu eleman ağını oluşturma özelliğine sahiptir.



Şekil 5.

Düğüm makro elemanında kullanılan arayüz elemanının deplasman vektörü \underline{U} alt çerçeve ve üst rijit bağlantı ankraj elemanının deplasman vektörü \underline{U}^* olsun. Arayüz elemanı iki elemanın arasına yerleştirilmiş olduğundan ve bu elemanlarla birlikte davranacağından arayüz elemanının deplasman vektörü \underline{U} iki elemanın deplasman vektörü \underline{U}^* cinsinden ifade edilebilir.



Şekil 6.

Deplasman vektörleri \underline{U} ve \underline{U}^* arasındaki ilişki

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_B \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_B & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_T \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_B^* \\ \underline{U}_T^* \end{pmatrix} \quad (34)$$

arayüz elemanın \underline{U} cinsinden denge denklemi

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (35)$$

olup burada \underline{T}_B ve \underline{T}_T aşağıda verilen transformasyon matrisleridir.

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{4a_3}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4a_3}{3} & \frac{a_3}{3} \\ 3 & \frac{3L}{20} & \frac{4L}{7} & \frac{3}{20} & -\frac{3L}{7} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{27}{20} & \frac{4L}{27} & 0 & \frac{7}{27} & -\frac{2L}{27} \\ 1 & \frac{4a_3}{3} & \frac{a_3}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4a_3}{3} & 0 \\ 3 & \frac{3L}{7} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{3L}{20} & 0 \\ 0 & \frac{7}{27} & \frac{2L}{27} & 0 & \frac{20}{27} & -\frac{4L}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -a_1 + \frac{L}{3} \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -a_1 + \frac{2L}{3} \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -a_1 + L \end{bmatrix} \quad (36)$$

Arayüz elemanın \underline{U}^* cinsinden denge denklemi

$$\underline{K}^* \cdot \underline{U}^* = \underline{F}^* \quad (37)$$

olup \underline{K}^* ve \underline{F}^* denklem aşağıda verilen transformasyonlar ile hesaplanmaktadır.

$$\underline{K}^* = \underline{T}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{T} \quad (38)$$

$$\underline{F}^* = \underline{T}^T \cdot \underline{F}$$

Referanslar

- Kassegne, S.K., Reddy, J.N., 1997, A layerwise shell stiffener and stand-alone curved beam element, *Asian Journal of Structural Engineering*, Vol. 2, pp. 1-17.
- Lam, S.S.E., Zou, G.P., 2001, Higher-order shear deformable finite strip for the flexure analysis of composite laminates, *Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 198-206.
- Lou, H., Hanagud, S., 2000, Dynamics of delaminated beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 1501-1519.
- Qiu, Y., Crisfield, M.A., Alfano, G., 2001, An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 68, pp. 1755-1776.
- Li, G., Lee-Sullivan, P., Thring, R.W., 1996, Nonlinear finite element analysis of stress and strain distributions across the adhesive thickness in composite single-lap joints, *Composite Structures*, Vol. 46, pp. 395-403.
- Pandey, P.C., Narasimhan, S., 2001, Three-dimensional nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives, *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 769-783.
- Colotti, V., Spadea, G., 2001, Shear strength of RC beams strengthened with bonded steel or FRP plates, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, pp. 367-373.
- Chen, J.F., Teng, J.G., 2001, Anchorage strength models for FRP and steel plates bonded to concrete, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, pp. 784-791.
- Smith, S.T., Teng, J.G., 2002, FRP-strengthened RC beams-I: review of debonding strength models, *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 385-395.
- Smith, S.T., Teng, J.G., 2002, FRP-strengthened RC beams-II: assesment of debonding strength models, *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 397-417.