ECAS2002 Uluslararası Yapı ve Deprem Mühendisliği Sempozyumu. 14 Ekim 2002.
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

YAPILARIN GEOMETRİK NONLİNEER ANALİZİNDE İLERİ ÇÖZÜM PROSEDÜRLERİ

Z. AY
Süleyman Demirel Üniversitesi,İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Isparta 32260,Türkiye

G. DURMUŞ
Süleyman Demirel Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Isparta 32260, Türkiye

ÖZET: Yapılarda , stabilite bozukluklarına taşıyıcı sistem ve elemanların burkulması, P-δ etkileri, düğüm noktalarının hareketi ve mesnet çökmeleri sebep olmaktadır. Stabilitesini kaybeden yapı, daha küçük göçme yükleri altında taşıma gücünü kaybederek kısmen ya da tamamen kullanılmaz hale gelmektedir.. Taşıyıcı sistemin veya elemanın ilk burkulmasından sonra, yapının hemen göçmeyerek taşıma özelliğini devam ettirmesi, ileri burkulma davranışlarının da incelenmesi büyük önem taşımaktadır. İşte bu noktada, ileri burkulma davranışı incelenirken elde edilen yük–deplasman eğrileri katlı kritik noktalara sahip olduğu için bu kritik noktaları aşıp yapının yük- deplasman eğrisinin sonuna kadar elde edilmesi gerekmektedir. Özellikle son yıllarda, bu konuda pek çok çalışma yapılmış ve yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu çalışmada, yapıların geometrik nonlineer analizi için son zamanlarda geliştirilen yöntemlerin genel bir değerlendirilmesi yapılmış ve bu yöntemlerden Arc-Length yöntemi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Geometrik Nonlineer Analiz, Stabilite, Arc-Length Yöntemi

ABSTRACT: When a change in the geometry of structures or structural component under compression will result in the loss of its ability to resist loading, this condition is called instability. Instability can lead to suddenly failure of a structure because of system or element loss of load-carrying capacity. Therefore, instability effects must be taken into account when one designs a structure. In geometrically non-linear analysis there are two fundamental different types of instability behavior are closely related to the concepts of limit point and bifurcation point on the load-displacement or equilibrium path of structure. In this study, new solution procedures for solving geometrically nonlinear problems with multiple limit points and snap back points in literatures have been presented.Thus, more recently, the developments in geometrically nonlinear structural analysis are presented.

Keywords: Geometrically Nonlinear Analysis, Stability, Arc-Length Method

Giriş

Geometrik nonlineerite, eksenel kuvvetten dolayı meydana gelen sehimleri, deforme olmuş elemanın geometrisinin değişimini, büyük deplasmanları, elemanlardaki lineer elastik şekil değişmeleri kapsar.Elemanlarda veya sistemde meydana gelen deformasyonlar küçükse, instabilite etkileri ihmal edilir. Böylece, eksenel kuvvet ile birlikte diğer kesit tesirlerine maruz elemanlarda, eksenel kuvvet ve kesit tesirleri arasındaki etkileşim ihmal edilir.İnstabilite etkilerinin ihmal edildiği durumlarda kuvvetlerle deplasmanlar arasındaki ilişkiyi ifade eden [K] matrisi sabit ve lineerdir. Eğer instabilite etkileri ihmal edilmiyorsa, yani, deformasyonlar büyükse [K] nonlineer bir matristir. Nonlineer [K] matrisi iki matristen meydana gelir.

$$[K_T]=[K_L]+[K_G] \qquad (1)$$

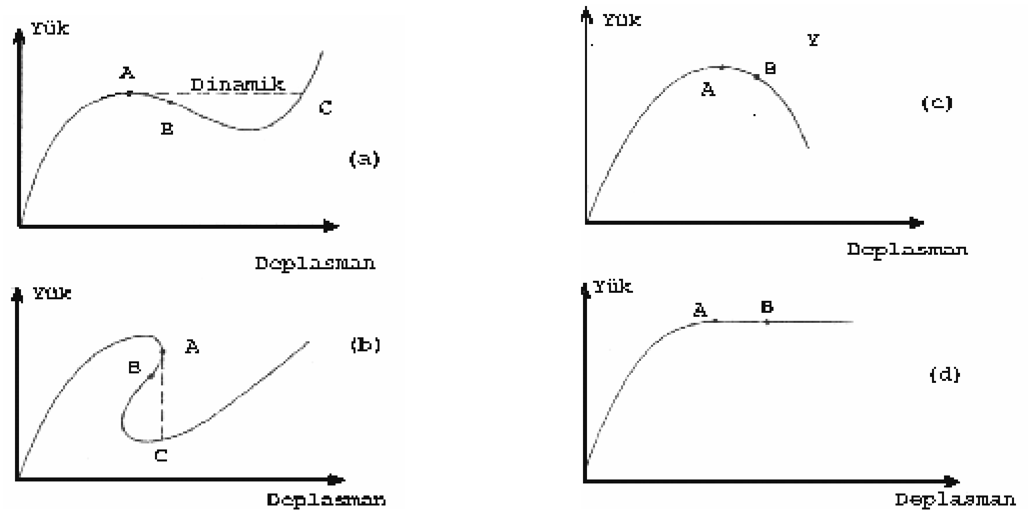
Burada $[K_L]$; lineer elastik rijitlik matrisidir. $[K_G]$ ise, geometrik rijitlik matrisi olarak adlandırılmaktadır. Çeşitli kesit zorları ve tipleri için değişik yaklaşımlara dayanarak, düzlem ve uzay çerçeve elemanları için çıkarılmış ve literatüre geçmiştir.Denklem (1) ile verilen $[K_T]$ ise tangent rijitlik matrisi olarak adlandırılmaktadır. $[K_T]$ matrisi, düğüm yüklerinin artımsal değerleri ile düğüm deplasmanlarının artımsal değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Malzemenin elastik veya inelastik olması durumuna göre, elastik tangent rijitlik matrisi veya inelastik tangent rijitlik matrisi olarak adlandırılır.

Eleman Hareketinin Tanımlanması

Çerçeve yapıların geometrikçe nonlineer analizinde kullanılan esas denklemlerin formülasyonu, ya sonlu eleman yaklaşımına, yada kiriş-kolon yaklaşımına dayanır. Eleman hareketinin tanımlanmasında ise, esas olarak Lagrangian veya Euler Koordinat sistemi kullanılır. Şekil değiştirmemiş cisme bağlı esken takımına Lagrangian koordinatları, şekil değiştirmiş eksen takımına ise Euler koordinatları denilmektedir.Eulerian formülasyonu ise tam olarak gözden geçirilmiş Lagrangian yaklaşımıdır. Geometrikçe nonlineer analizde kullanılan Lagrangian tanımları üç tiptir. Bunlar, Toplam Lagrangian tanımı, gözden geçirilmiş Lagrangian tanımı ve kısmi gözden geçirilmiş Lagrangian tanımıdır.

Yük Deplasman Eğrileri

Yapı analizinde genel olarak dört tip yük-sehim eğrisinden bahsetmek mümkündür. Şekil 1'de çeşitli yük sehim eğrileri verilmiştir. Bu yük sehim eğrilerinden a, b ve c 'de verilenler limit noktalara sahip eğrilerdir. a'da snap-through, b'de ise snap-back eğrileri gösterilmiştir. Snap-through dinamik analizde, snap-back ise statik analizde karşımıza çıkmaktadır. Burada a ve b atalet ve dinamik etkileri kapsamaktadır. Şekil 1.a'da yük kontrolü altında dinamik davranış, C noktası civarında küçük sönümlü salınımla kesik çizgiyi takip etmektedir. A 'dan C 'ye sürekli çizgi ise yük kontrolü altında dengesi unstabil olduğunu gösterirken, deplasman kontrolü altında stabil olduğunu gösterir. Şekil 1.b 'de deplasman kontrolü altında, dinamik davranış, statik olan fakat yeniden unstabil olan eşdeğer sürekli çizgi ile A ve C arasında kesik çizgiyi takip etmekte ya da dinamikte kesik çizgiyi takip etmektedir. Şekil 1.c 'de göçme, şekil 1.d 'de ise malzeme akmasından dolayı düktil göçme haline ait yük-sehim eğrileri verilmiştir.



Şekil 4.1. Değişik yük sehim eğrileri (a) Snap-Through (b) Snap-Back (c) Brittle Collopse (d) Ductule-Collopse (Crisfield,1991).

Düzlem Çerçeve Elemanı İçin Geometrik Rijitlik Matrisinin Çıkartılması

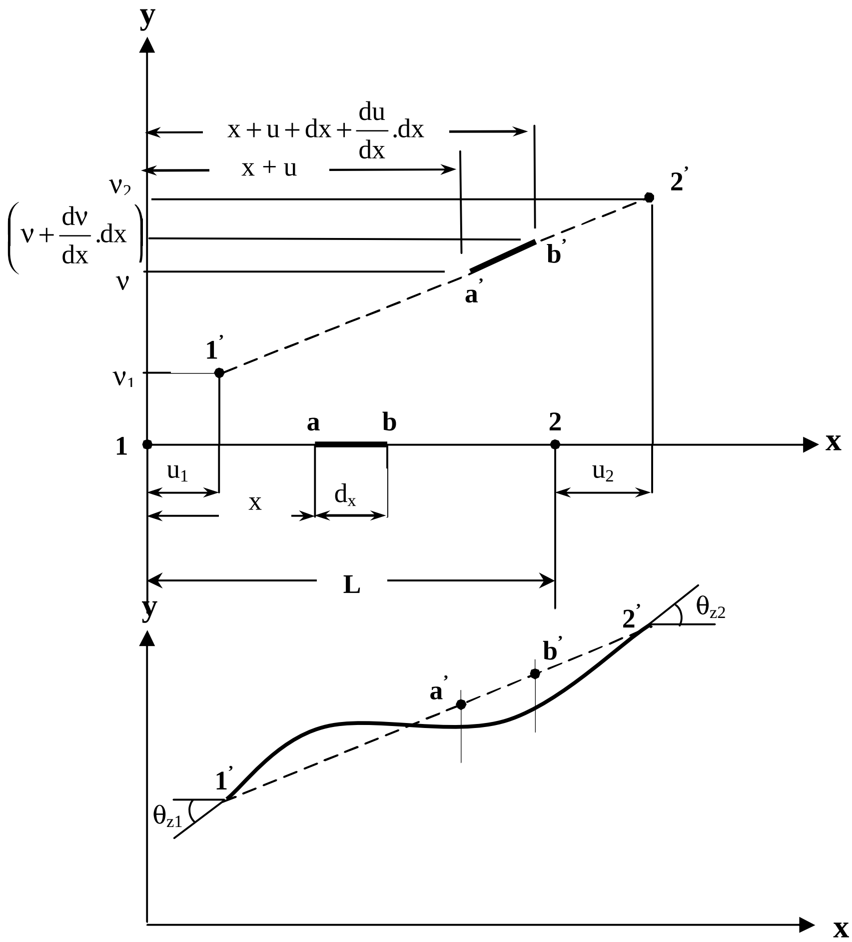
Daha önce de değinildiği gibi, çerçeve yapıların geometrikçe nonlineer analizinde kullanılan esas denklemlerin formülasyonu, ya sonlu eleman yaklaşımına, yada kiriş-kolon yaklaşımına dayanır. Kiriş-kolon yaklaşımında, stabilite teorisinden doğrudan faydalanarak elde edilen stabilite fonksiyonları kullanılır. Sonlu Eleman yaklaşımında ise potansiyel enerji fonksiyonunun minimizasyonu esastır. Burada, virtüel deplasman prensibini kullanarak düzlem çerçeve elemanı için geometrik rijitlik matrisinin çıkartılması açıklanacak, sürekli ortam problemlerine girilmeyecektir.

Geometrik Nonlineer Analizde Sonlu Elaman Yaklaşımı

Geometrik nonlineer analizde, sonlu elemanlar yaklaşımında, potansiyel enerji fonksiyonunun minimizasyonu esastır. Bu noktada, potansiyel enerji fonksiyonlarının bütün geometrik nonlineerite durumlarını kapsadığını ve artımsal yükler için deplasmanları minimum yapacak şekilde minimize edildiği söyleyebiliriz. Diğer taraftan, yine geometrikçe nonlineer problemlerde, sonlu eleman yaklaşımı iki kısımdan müteşekkildir. Birincisi, elemanlarla ilgili sonlu eleman formülasyonu, ikincisi, yük-sehim eğrisinin elde edilmesi için çözüm teknikleridir. Elemanlarla alakalı sonlu eleman formülasyonu, klasik matris deplasman metodu kullanılarak, instabilite etkilerinin hesaba katılması için gerekli ve geometrik rijitlik matrisi olarak adlandırılan matrisin çıkarılmasıdır. Daha önceden belirtildiği gibi geometrik rijitlik matrisi, hem bükülmeden dolayı eleman boyundaki değişimin, hem de eksenel kuvvet ve momentlerin etkisinden dolayı eleman esneklik rijitliklerindeki değişimi hesaba katmaktadır.

Potansiyel enerjiye dayalı sonlu eleman metodunda “Kararlı Potansiyel Enerji Prensibi” veya “Kararlı Karşıt Potansiyel Enerji Prensibi” olmak üzere iki tür yaklaşım söz konusudur. Çubuk sistemler için “Kararlı Potansiyel Enerji Prensibi”ni kullanırsak, bu matris deplasman metoduna karşılık gelir. Eğer Kararlı Karşıt Potansiyel Enerji prensibini kullanırsak, bu matris kuvvet yöntemine karşılık gelir. Dış kuvvetlerin etkisi altında dengede bir sistemin Toplam Potansiyel Enerjisi, iç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi ile sistemi şekil değiştirmeye zorlayan dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin toplamına eşittir.

Virtüel Deplasman Prensibini Kullanarak Düzlem Çerçeve Elemanı için Geometrik Rijitlik Matrisinin Çıkartılması (Mcguire, 2000).



Şekil 3. Düzlem Çubuk elemanın sonlu şekil değiştirmesi (Mcguire, 2000).

$$e_{fin} = \frac{du}{dx} - y\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] \qquad (2)$$

$$\delta W_{int} = \int_0^L \sigma_x A\left(\frac{d\delta u}{dx}\right).dx + \int_0^L M_z\left(\frac{d^2\delta v}{dx^2}\right).dx + \frac{1}{2}\int_0^L \sigma_x A\left[\delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right].dx \qquad (3)$$

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right) EA \left(\frac{d\delta u}{dx}\right) dx + \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) EI_z \left(\frac{d^2 \delta v}{dx^2}\right) dx + \frac{1}{2} F_{x2} \int_0^L \left[\delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] .dx \tag{4}$$

Denklem (4)'de geometrik nonlineerite ile ilgili virtüel iş;

$$\delta W_{int\,g} = \frac{1}{2} F_{x2} \int_0^L \left[\delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] .dx \tag{5}$$

Eleman Rijitlik Matrisi İçin Virtüel Deplasman Formülü

$$\delta W = \delta W_{ext} - \delta W_{int} = 0 \tag{6}$$

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \lfloor \delta e \rfloor [E] \{e\} d(vol) \tag{7}$$

$$\delta W_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \delta\Delta_i .F_i \tag{8}$$

$\{e\}$ reel şekil değiştirme, $\{\delta e\}$ virtüel şekil değiştirme, $[E]$ elastik sabit

$$\int_{vol} \lfloor \delta e \rfloor [E] \{e\} d(vol) = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i .F_i = \lfloor \delta\Delta \rfloor \{F\} \tag{9}$$

$$[k] = \left[\int_{vol} \lfloor \delta e \rfloor [E] \{e\} d(vol) \right] \tag{10}$$

$$\lfloor \delta\Delta \rfloor [k] \{\Delta\} = \lfloor \delta\Delta \rfloor \{F\} \tag{11}$$

$$[k]\{\Delta\} = \{F\} \tag{12}$$

$$[k_g] = F_{x2} \int_0^L [\{N'_u\}\lfloor N'_u \rfloor + \{N'_v\}\lfloor N'_v \rfloor].dx \tag{13}$$

Burada $\lfloor N_u \rfloor$ ve $\lfloor N_v \rfloor$ deplasman koordinatlarına karşılık gelen şekil fonksiyonları ve $\lfloor N_u' \rfloor$ ve $\lfloor N_v' \rfloor$ şekil fonksiyonlarından şekil değiştirmeye bağlı olarak elde edilen büyüklüklerdir. Denklem 13'den faydalanarak düzlem çerçeve elemanı için geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[k_g] = \frac{F_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Geometrik Nonlineer Analizinde İleri Yöntemler

Geometri bakımından nonlineer problemler genel olarak büyük sehimleri ihtiva ederler. Bu tip problemlerde [K] rijitlik matrisi sabit değildir ve deforme olmuş geometri ile alakalı olarak elde edilir. Geometrikçe nonlineer problemlerde yük sehim eğrisini bulmak için üç esas prosedür vardır. Bunlar, lineer artımsal yöntemler, nonlineer artımsal yöntemler ve direkt yöntemlerdir

Nonlineer Yük-Sehim Eğrisi İçin Çözüm Prosedürleri (Al-Rasby, 1991)

Lineer artımsal yöntemler

Nonlineer yük–sehim eğrisi lineer prosedür adımlarıyla teşkil edilir. Yük, küçük artımlar olarak uygulanır ve bu artımların her biri için deformasyondaki değişimler lineer analiz kullanılarak belirlenir. Daha sonra, artımda, her yükün sebep olduğu deplasman değişimleri hesaplanır. Lineer artımsal metot, deplasmanların elde edilmesinde yük adımlarının başlangıcında mevcut deformasyonları ve iç kuvvetlere dayalı Tangent Rijitlik matrisini kullanır. Verilen yük adımlarında, rijitlik matrisinin terimleri sabit kaldığı için, bunun bir defa hesabı yeterlidir.

Nonlineer artımsal yöntemler

Hem yük adımı boyunca oluşan deplasmanlar ve iç kuvvetlerin fonksiyonu hem de yük adımları başındaki mevcut deplasmanların fonksiyonu olan, artımsal rijitlik matrisi kullanılır. Her bir yük artımı içindeki iterasyonlar boyunca, rijitlik matrisi yeniden belirlenir. Bu iterasyonlar artımsal yük ihmal edilecek düzeye gelinceye kadar devam eder ve sonraki yük artımı için tekrar başa dönülür. Böylece artımsal deformasyonları en iyi yaklaşımla hesaplamamız mümkün olmaktadır.

Direkt yöntemler

Yük sehim eğrisi boyunca, herhangi bir yüke karşı gelen deformasyon, tek adımda tam yük uygulanarak elde edilir. Bu metot toplam yükler ve toplam deformasyonlar esasına dayanırken, artımsal yöntemler, artımsal yükler, artımsal deformasyonlar esasına dayanır. Direkt yöntem, yükün tek değerine karşı gelen deformasyonu bulmak için uygun bir yöntemdir. Kullanılan matris [K] Sekant Rijitlik matrisi olarak anılır. Bu matris mevcut deformasyonlar ve iç kuvvetlere bağlıdır. Toplam yük etkidiği zaman, hesabın başında bu yükler bilinmediği için [K] matrisindeki terimler iterasyonla belirlenmektedir.

Katlı Kritik Noktalara Sahip Sistemler İçin Nonlineer Analiz Yöntemleri

Yapıların başlangıç ve ileri kritik burkulma davranışını incelemek için yapının nonlineer yük sehim eğrisinin elde edilmesindeki yaklaşımlar önem kazanmaktadır.

Klasik Newton-Raphson veya düzeltilmiş Newton Raphson yöntemi nonlineer davranış analizinde iterasyon stratejisi olarak kullanılırken katlı instabilite noktasında yetersiz kalır ki bu durum iki yönden yöntemin dezavantajıdır. Birincisi, göçme yükü gerçek yük taşıma kapasitesinden küçük belirlenmiştir. İkincisi ise, yapının ileri burkulma davranışı tanımlanmamaktadır. İşte bu sorunları ortadan kaldırmak için son yıllarda geliştirilen bazı yeni yöntemler şunlardır. Yük Kontrol Yöntemi, Deplasman Kontrol

Yöntemi , Arc-Length Yöntemi, İş Kontrol Yöntemi. Burada , yukarıdaki yöntemlerden Newton-Raphson kısaca anlatılırken, İş Kontrol ve Arc-Length yöntemleri üzerinde durulacaktır.

Newton-Raphson Yöntemleri

Yapıların nonlineer çözümünde ardışık yöntem olarak çeşitli Newton-Raphson (NR) yöntemlerinden, Newton-Raphson, Düzeltilmiş Newton-Raphson (MNR), Tam Newton-Raphson (FNR) veya Başlangıç Gerilme Yöntemlerinden (ISM) biri kullanılmaktadır. Denklem (14)'de nonlineer problemlerin ardışık formülasyonu verilmiştir. Denklem (15) denklem (14)' de yerine konulursa denklem (16) elde edilir.

$$[K_T]\{\delta d\} = \{P\} - \{F\} \tag{14}$$

$$\{R\} = \{P\} - \{F\} \tag{15}$$

$$[K_T]\{\delta d\} = \{R\} \tag{16}$$

Burada;
$[K_T]$: Tangent rijitlik matrisi {R}: Dengelenmemiş yük vektörüdür.
$\{\delta d\}$: Deplasman vektörü {P}: Dış kuvvet vektörü {F}: Uç kuvvet vektörü

Diğer taraftan, ardışık işlem tekniği tek nokta çözümü sağlar. Uygulamada ise, yapının yük-deplasman davranışı bir bütün izlemek istenir. Bunun için, artımsal ve ardışık çözüm prosedürlerinin bir arada kullanılması gerekir. Ardışık/Artımsal çözüm için denklem (17)' de görüldüğü gibi {P} dış yük vektörünün orantısal değeri uygulanır.

$$[K_T]*\{\delta d\} = \lambda\{P\} - \{F\} \quad . \tag{17}$$

Burada; λ: yük parametresidir

İş Kontrol Yöntemi (Chen ve Blandford, 1993)

İş kontrol yöntemi yük deplasman eğrisinin yumuşak snap-back ve snap-through limit noktalarının tespiti için kullanılır. Bu yöntemin de kendine özgü bazı üstünlükleri vardır.

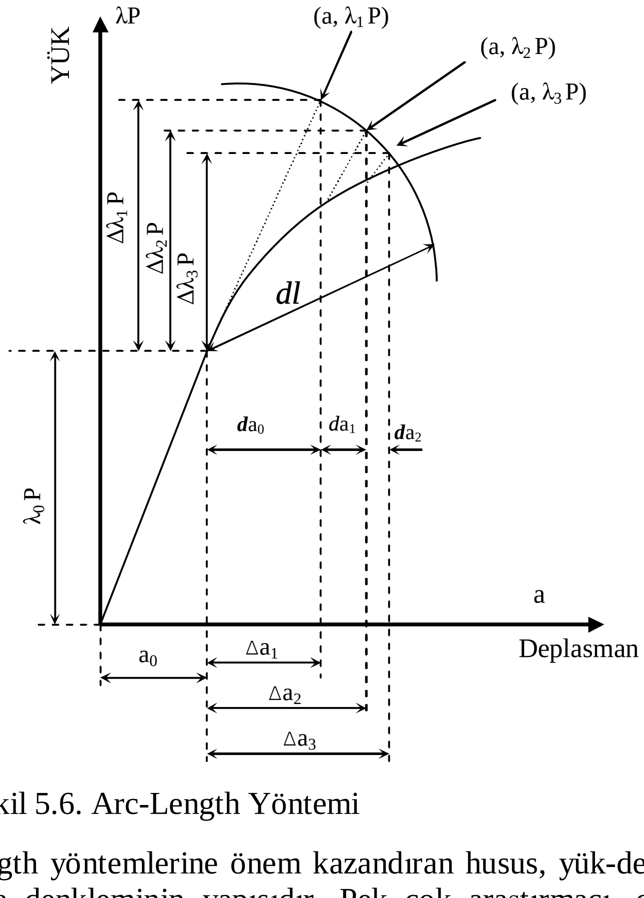
$$[K]_{i-1}^{k+1}\delta\{q\}_i = \lambda_i^{k+1}\{P\} - \{F\}_{i-1}^{k+1} \tag{18}$$

[K]: Rijitlik matrisi, {q}: Deplasman vektörü , {P}: Yük vektörü, {F}:Dengelenmiş kuvvet vektörü, k+1: geçerli yük adımı, λ: Yük parametresi

Denklem (18)'un çözümü için bir yük çarpan büyüklüğünün seçimini gerekmektedir. Ardışık veya artımsal değerin $\delta\lambda_i$ seçimi için değişik teknikler kullanılabilir. Artım değerinin sabit olması, bir veya daha fazla limit durumun tespiti için uygun değildir. Ayrıca $\delta\lambda_i$ seçim stratejisi nonlineer davranış derecesine dayanmalıdır. Arc Length ve Düzeltilmiş Arc Length metotlarında yük ve deplasman artımı arc length (yay uzunluğu) kontrol edilirken değişmektedir. Her iki metot da limit durum problemlerini çözebilmektedir. Bununla birlikte arc length ölçümü, yakınsama veriminin düşmesine neden olan tutarsız birimleri kullanmaktadır. İş Kontrol Yöntemi bu sorunu çözebilmektedir.

Arc-Length Yöntemi (Fafard ve Massicotte, 1993)(Yang, 1994)

Gerçekte bütün yapılar limit nokta ötesinde bir davranış sergilerler ve bu nedenle bu çalışmalar doğrudan analiz ve dizayn prosedürleri ile ilgili çalışmalardır. Newton-Raphson ve Modified Newton-Raphson yöntemleri yapıların nonlineer davranışında burkulma yükünün hesabında oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir. Fakat değişik Newton yaklaşımları tek başlarına, limit nokta civarındaki noktalarda çözümün sağlanmasında başarısız kalmaktadırlar. Yakın zamanlarda ilk önce Riks ve Wepner tarafından önerilen Arc-Length metodu, limit nokta civarında, Newton metotlarının tek başlarına kullanıldığı zamanki başarısızlığını ortadan kaldırmaktadır. Bu yöntem de, yük parametresi de bilinmeyen deplasmanlar gibi değişken olarak alınmıştır. Sınırlama denklemi deplasmanları ve yükleri kapsayacak Arc-Length algoritmaları mevcuttur. Bu algoritmalarda sınırlama denkleminde yük terimi ihmal edilmemekte, deplasmanların ve yüklerin farklı büyüklükler olduğu da bilinmektedir. Bu Arc-Length algoritmaların hepsinde skala parametrelerinin otomatik hesabı esastır ve böylece yük artımı için etkin yaklaşım sağlanmaktadır. Yöntem, M.N.R prosedürü kullanılarak mevcut “sonlu eleman” standartları içine kolayca uyarlanabildiğinden Crisfield ve Ram tarafından son zamanlarda daha da cazip hale getirilmiştir



Şekil 5.6. Arc-Length Yöntemi

Arc-Length yöntemlerine önem kazandıran husus, yük-deplasman eğrisinde kullanılan sınırlama denkleminin yapısıdır. Pek çok araştırmacı, deplasman ve yüklerin farkı büyüklükler olduklarını belirtmişler, fakat, uygulamada, yük terimi katkısı ihmal etmişlerdir. Nonlineer analizde kullanılan artımsal metotlarda, bir diğer önemli husus ise, yük artım adımlarının seçiminde ortaya çıkmaktadır. Bergan, güncel rijitlik parametresi(CSP ,Current Stiffness Parameters) önermektedir. Oysa Crisfield ve Ram, kullanıcı tarafından önceden belirlenmiş iterasyon sayısı ile ilgili yük adımında yakınsama için gerekli iterasyon sayısının oranlarına dayalı bir yaklaşımı esas almışlardır. Önceki yaklaşım, limit nokta civarında oldukça küçük yükleme adımında sonuca gitmektedir. Böylece yapının tam davranışı için çok sayıda yükleme adımı sayısına ihtiyaç vardır. Sonraki yaklaşım ise , bir adım için iterasyon sayısı artışını göz önüne alarak daha az yükleme adımı sayısını esas alır. Yani birincisinde, adım miktarı küçük adım sayısı fazla, ikincisinde adım miktarı bir orana göre bulunur. Fakat her adımda iterasyon sayısı fazladır. Genelde nonlineer analizin değeri yük-deplasman eğrisinde gerekli yük adımı sayısına bağlı olarak artar. Nonlineer yapı analizinin tam anlamıyla hassas olması için, yük adımının otomatik hesaplanması gerekmektedir.

Referanslar

1. Al-Rasby, Solution Techniques In Nonlinear Structural Analysis, Computers & Structures Vol.40 No 4., 1991

2. Chajes A., Churchıll J.E., Nonlinear Frames Analysis By Finite Element Methods, Journal Of Structural Engineering, Vol.:113, No:6, Pp.1221-1235, 1987

3. Chen H., Blandford G.E., Work-Increment–Control Method for Non-linear Analysis, International journal for numerical Methods In Engineering, Vol.36, 1993

4. Cook R.; Malkus D.; Plesha M., Concepts And Applications Of Finite Element Analysis, Third Edition. John Wiley & Sons, New York, 1989.

5. Crisfield M.A., 1991, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Willey & Sons, New York, Volume 1.

6. Fafard M., Massicotte B., Geometrical Interpretation of The Arc-Length Method, Computer & Structures Vol.46, 1993

7. Mcguire, W., Gallagher, R., H., Ziemian, R., D., 2000. Matrix Structural Analysis. 460 S. John Wiley&Sons, Inc. USA

8. Pai P.F., Nayfeh A.H., A New Method For The Modeling of Geometric Nonlinearities in Structures, Computer & Structures Vol. 53, 1994

9. Wong M.B., Tin-Loi F., Geometrically Non-linear Analysis Of Elastic Framed Structures, Computers And Structures, Vol.:34, No:4 Pp.633-640, 1990

10. Zienkiewicz O., Taylor R., 1989,The Finite Element Method, Fourth Edition, Volumes 1 And 2. Mcgraw-Hill, London.

11. Yang Y.B., Kuo S.R., 1994, Nonlineer Framed Structures, Simon &Schuster (Asia) Pte Ltd, Singapore